HOJA DE EJERCICIOS 7
Análisis Matemático.
CURSO 2017–2018.

Problema 1. Consideramos el abierto $U_0 = \{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x_1>0\}$ y la función:

$$f: U_0 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad f(x_1,x_2) \;=\; \left(\sqrt{x_1}+\frac{1}{2}\,x_2^2 \;,\; x_2\,\sqrt{x_1}+\frac{1}{3}\,x_2^3\right) \,,$$

donde $\sqrt{x_1}$ denota la raíz positiva.
(a) Demuestra que f tiene una inversa local $g=(g_1,g_2)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno V de $y^0 = \left(\frac{3}{2},\frac{4}{3}\right)$ y tal que $g(y^0)=(1,1)$.
(b) Demuestra que en V se cumple la siguiente identidad:

$$Dg \;\equiv\; \begin{pmatrix} 2\sqrt{g_1}+2\,g_2^2 & -2\,g_2 \\ \dfrac{-g_2}{\sqrt{g_1}} & \dfrac{1}{\sqrt{g_1}} \end{pmatrix} .$$

(c) Calcula la matriz hessiana de g_1, en el punto general de V, como una combinación explícita de los valores g_1, g_2.
(d) Calcula el número $\dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2}\, g_2(y^0)$.

Problema 2. Demuestra que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x-\operatorname{sen}x$ es biyectiva. Demuestra que su inversa f^{-1} no es derivable en 0.

Problema 3. Demuestra que existe una única función $f: U\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno U de $(0,0)$, con $f(0,0)=0$ y tal que

$$e^{f(x,y)} = \left(1+x\,e^{f(x,y)}\right)\left(1+y\,e^{f(x,y)}\right) \qquad \text{en todos los } (x,y)\in U\,.$$

Problema 4. Prueba que la ecuación

$$\operatorname{sen}(yz)+\operatorname{sen}(xz)+\operatorname{sen}(xy)=0$$

admite una única solución $z=f(x,y)$ de clase C^1 en un entorno del punto $(\pi,0)$ y cumpliendo $f(\pi,0)=1$. Calcula el polinomio de Taylor de orden uno de f en dicho punto.

Problema 5. Dibuja los abiertos

$$U_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1<x^2+y^2<4,\ y>-\frac{1}{2}\,|x|\,\}, \qquad U_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1<x^2+y^2<4,\ y<\frac{1}{2}\,|x|\,\}.$$

Halla una inversa del cambio a polares definida en U_1 y otra definida en U_2. Demuestra que, sin embargo, no hay ninguna inversa local continua en $U_1\cup U_2$.

`Dale la vuelta a la hoja`

Recordemos las siguientes **definiciones**. Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos y $f : X \to Y$.

a) f es *abierta* si para todo abierto $U \subset X$ la imagen $f(U)$ es un abierto de Y.

b) f es *cerrada* si para todo cerrado $C \subset X$ la imagen $f(C)$ es un cerrado de Y.

c) f es una función *de Lipschitz* si existe $K > 0$ tal que $d_Y\left(f(x'), f(x)\right) \le K\, d_X(x', x)$ para cualesquiera $x, x' \in X$. Las K que cumplen esto se llaman *constantes de Lipschitz* de f.

d) Una función $f : X \to X$ que sea de Lipschitz y admita una constante de Lipschitz $K < 1$ se llama *contractiva*.

e) f es *coerciva* si existe $\lambda > 0$ tal que $d_Y\left(f(x'), f(x)\right) \ge \lambda\, d_X(x', x)$ para cualesquiera $x, x' \in X$. Las λ que cumplen esto se llaman *constantes de coercividad* de f.

Problema 6. Demuestra que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es coerciva y continua entonces es cerrada.
Indicación: Si una sucesión de imágenes $\{f(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente, la original $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Problema 7. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$ es abierta pero no cerrada.

Problema 8. Demuestra que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$ es cerrada. ¿Es f abierta?
Indicación para ver que es cerrada: Si una sucesión de imágenes $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, la original $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es acotada.

Problema 9. Identificando $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$, demuestra que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z^3$ es abierta.
Indicaciones: estudia primero $f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$. Después estudia f en el entorno de 0.

Problema 10. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $f, g : U \to \mathbb{R}^n$. Supongamos que f es coerciva con constante λ y g es Lipschitz con constante K. Demuestra que si $K < \lambda$ entonces $f + g$ es coerciva con constante de coercividad $\lambda - K$.

Problema 11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable y Lipschitz de constante $C > 0$. Demuestra que $\|Df(x)\| \le C$ para todo $x \in U$.
Indicación: Considera derivadas según un vector.

Problema 12. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase $\mathcal{C}^1$ y tal que existe $M > 0$ con $\|Dg(x)\| \le M$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (aquí $\|\cdot\|$ es la norma en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ asociada a una norma de $\mathbb{R}^n$). Demuestra que la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x) = (1 + M)x + g(x)$ es una biyección de $\mathbb{R}^n$ consigo mismo.
Indicación: Demuestra que $f(\mathbb{R}^n)$ es un abierto; para ello prueba que para todo x y todo $v \neq \mathbf{0}$ es $Df(x)v \neq \mathbf{0}$ y usa el teorema de la función inversa. Después aplica los Problemas 6 y 10 y para probar que $f(\mathbb{R}^n)$ es un cerrado.

Problema 13. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ abierta y cerrada. Demuestra que es suprayectiva.
